

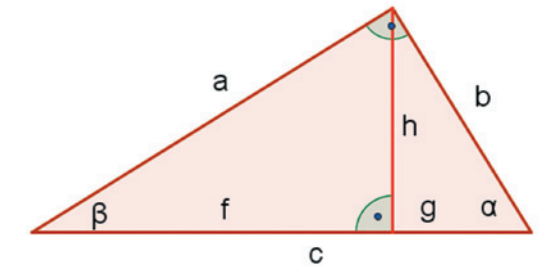
## 13. Täisnurkse kolmnurga lahendamine

Täisnurkse kolmnurga kohta on võimalik tõestada, et kehtivad järgnevad teoreemid <sup>1</sup>:

### Pythagorase teoreem:

täisnurkses kolmnurgas kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga, st

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



### Eukleidese teoreem:

täisnurkse kolmnurga kaateti ruut võrdub selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi korrutisega, st

$$a^2 = f \cdot c \text{ ja } b^2 = g \cdot c.$$

### Teoreem kõrgusest:

täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrguse ruut võrdub kaatetite projektsioonide korrutisega, st

$$h^2 = f \cdot g.$$

### Siinus, koosinus ja tangens täisnurkses kolmnurgas:

$$\text{siinus} = \frac{\text{vastaskaatet}}{\text{hüpotenuus}}$$

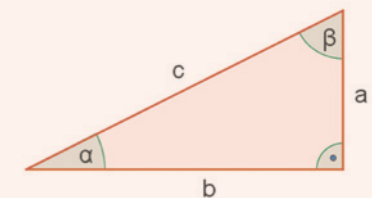
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ ja } \sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\text{koosinus} = \frac{\text{lähiskaatet}}{\text{hüpotenuus}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \text{ ja } \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\text{tangens} = \frac{\text{vastaskaatet}}{\text{lähiskaatet}}$$

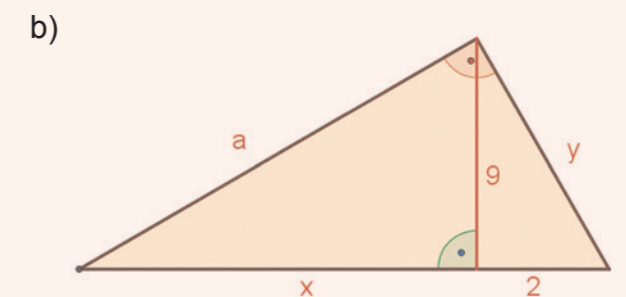
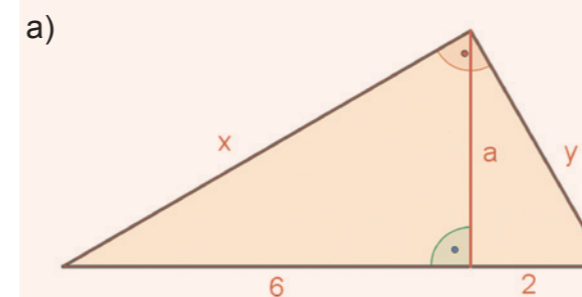
$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \text{ ja } \tan \beta = \frac{b}{a}$$



## SISUKORD

|   |     |
|---|-----|
| Tööraamatu kasutajale                                       | 3   |
| 1. Arvutamine harilike- ja kümnendmurdudega                 | 4   |
| 2. Protsentarvutus  | 8   |
| 3. Korrutamise abivalemite kasutamine                       | 18  |
| 4. Lineaar- ja ruutvõrrandid                                | 25  |
| 5. Tekstülesannete lahendamine lineaarvõrrandi abil         | 35  |
| 6. Lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine                      | 39  |
| 7. Tekstülesannete lahendamine ruutvõrrandi abil            | 44  |
| 8. Tekstülesannete lahendamine lineaarvõrrandisüsteemi abil | 48  |
| 9. Tehted algebraliste murdudega                            | 52  |
| 10. Ratsionaalavaldisel lihtsustamine                       | 60  |
| 11. Tehted astmete ja juurtega                              | 63  |
| 12. Funktsioonid ja nende graafikud                         | 66  |
| 13. Täisnurkse kolmnurga lahendamine                        | 79  |
| 14. Tasandilised kujundid                                   | 85  |
| 15. Ruumikujundid   | 97  |
| 16. Tõenäosusteooria ja statistika elemendid                | 113 |
| 17. Lisa: eksami näidisvariant                              | 119 |

1. Joonisel on täisnurkne kolmnurk. Leiame lõikude  $x$ ,  $y$  ja  $a$  pikkuse.



a) Lahendus:

1) kasutame teoreemi kõrgusest:

$$a^2 = 6 \cdot 2 = 12, \quad a = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3};$$

2) kolmnurga külj  $x$  on leitav kahel viisil: Pythagorase teoreemi järgi  $6^2 + a^2 = x^2$  ehk

$$36 + 12 = x^2 \text{ ehk } x = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3},$$

Eukleidese teoreemi järgi  $x^2 = 6 \cdot 8 = 48$ , millest  $x = 4\sqrt{3}$ .

<sup>1</sup> Eukleidese teoreem ja teoreem kõrgusest on antud lisaks kehtivale riiklikule õppekavale.

3) Külje  $y$  leidmiseks võime kasutada taas Pythagorase teoreemi:

$$2^2 + a^2 = y^2 \text{ ehk } 4 + 12 = y^2 \text{ millest } y = 4.$$

**Vastus:**  $x = 4\sqrt{3}$ ;  $y = 4$ ;  $a = 2\sqrt{3}$ .

b) Lahendus:

1) kaateti  $a$  projektsiooni  $x$  leiame kasutades teoreemi kõrgusest:  $2 \cdot x = 9^2$  ehk  $x = 40,5$ .

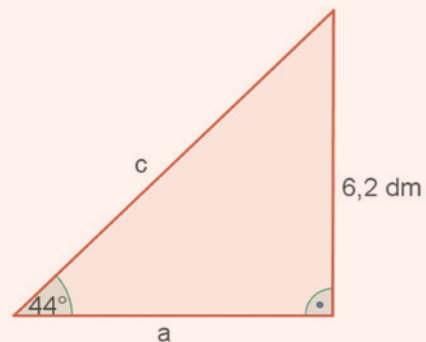
2) Pythagorase teoreemi järgi  $9^2 + x^2 = a^2$ , millest  $a^2 = 81 + 1640,5 = 1721,25$ . Leiame  $a$  väärtuse kümnendiku täpsusega, st  $a \approx 41,5$ .

3) Külje  $a$  leiame Pythagorase teoreemiga:  $2^2 + 9^2 = y^2$ , ehk  $y \approx 9,2$ .

**Vastus:**  $x = 40,5$ ;  $y = \sqrt{85} \approx 9,2$ ;  $a = \sqrt{1721,25} \approx 41,5$ .

2. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 6,2 dm ja selle kaateti vastas olev teravnurk on  $44^\circ$ . Leiame teise kaateti ja hüpotenuusi.

Hüpotenuusi  $c$  leiame siinuse (vt lk 65) abil:



$$\frac{6,2}{c} = \sin 44^\circ \Rightarrow c = \frac{6,2}{\sin 44^\circ} \approx 8,9 \text{ (dm)}.$$

Kaateti  $a$  võime leida Pythagorase teoreemi abil või kasutame tangensi definitsiooni täisnurkses kolmnurgas:

$$a) a^2 + 6,2^2 = 8,9^2 \Rightarrow a = \sqrt{8,9^2 - 6,2^2} = \sqrt{40,77} \approx 6,4 \text{ (dm)}.$$

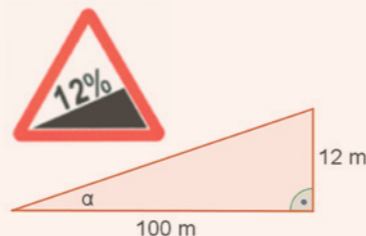
**Vastus:**  $a = 6,4$  dm;  $c = 8,9$  dm.

3. Maanteel on tõusu alguses pildil olev liiklusmärk. Kui suure nurga moodustab see tee horisontaalpinnaga?

Lahendus: kuna tee tõuseb 12%, siis iga 100-meetrise horisontaalse teelõigu kohta on tõus 12 meetrit. Kasutame tangensit:

$$\tan \alpha = \frac{12}{100} = 0,12; \quad \alpha \approx 6,8^\circ.$$

**Vastus:** otsitav nurk on ligikaudu  $6,8^\circ$ .



4. Lahendame täisnurkse kolmnurga, kui on antud kaatetid  $a = 64$  m ja  $b = 44$  m.

Lahendus: hüpotenuusi  $c$  leiame Pythagorase teoreemi abil,

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{millest } c = \sqrt{64^2 + 44^2} = \sqrt{6032} \approx 77,7 \text{ (m)}.$$

Kui pikema kaateti vastas on nurk  $a$ , siis  $\tan a = \frac{64}{44} \approx 1,4545$ , millest  $a \approx 55,5^\circ$  ja  $b = 90^\circ - 55,5^\circ = 34,5^\circ$ .

Kolmnurga pindala on võrdne kaatetite poole korrutisega, st  $S = \frac{ab}{2} = 1408 \approx 1400 \text{ (m}^2\text{)}$ .

**Vastus:**  $c \approx 77,7$  m;  $a \approx 55,5^\circ$ ;  $b = 34,5^\circ$ ;  $S \approx 1400 \text{ m}^2$ .

1. Missugused antud kolmnurkadest on täisnurksed? Tõmba neile joon alla.

a) 4; 5; 6   b) 5; 12; 13   c) 9; 12; 15   d) 8; 10; 18   e) 6; 6; 6   f) 20; 12; 16

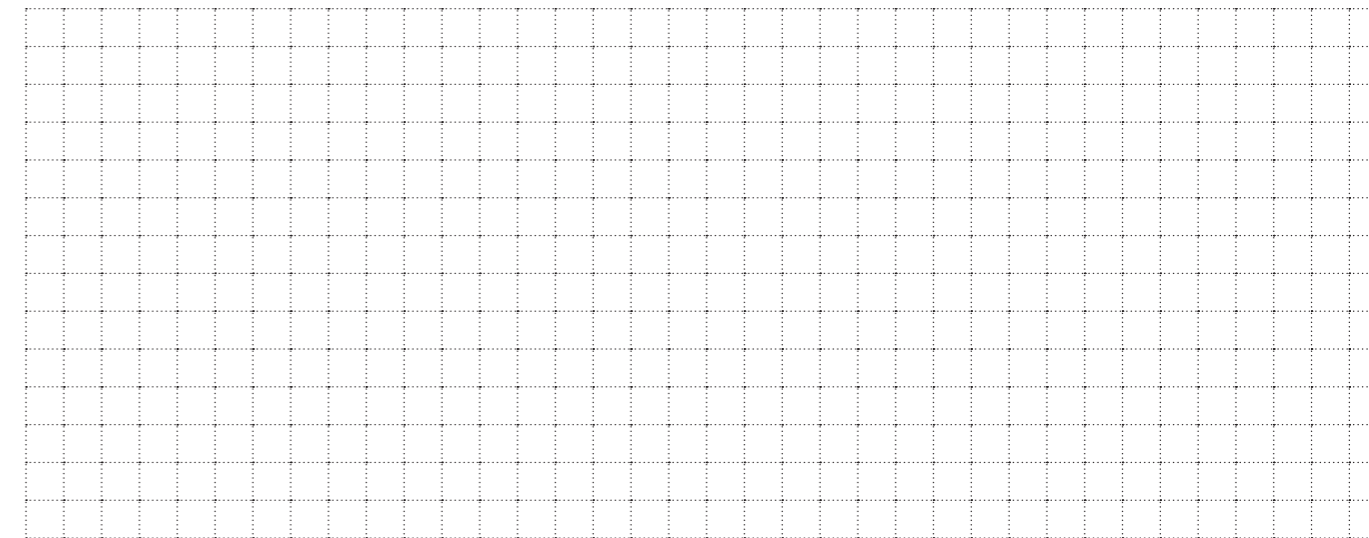
Mis liiki on kolmnurk d?

2. Leia täisnurkse kolmnurga puuduvad elemendid. Kirjuta need tabelisse.

|   | $a$ | $b$ | $c$  | $\alpha$   | $\beta$    | $S$ |
|---|-----|-----|------|------------|------------|-----|
| 1 | 5,6 | 8,3 |      |            |            |     |
| 2 | 3,5 |     | 12,6 |            |            |     |
| 3 | 5,5 |     |      | $40^\circ$ |            |     |
| 4 |     | 5,6 |      |            | $62^\circ$ |     |

|   | $a$  | $b$ | $c$  | $\alpha$   | $\beta$ | $S$  |
|---|------|-----|------|------------|---------|------|
| 5 |      |     | 5,4  | $56^\circ$ |         |      |
| 6 | 13,5 |     | 12,6 |            |         |      |
| 7 |      | 5,6 |      |            |         | 30,6 |
| 8 |      |     |      | $45^\circ$ |         | 60   |

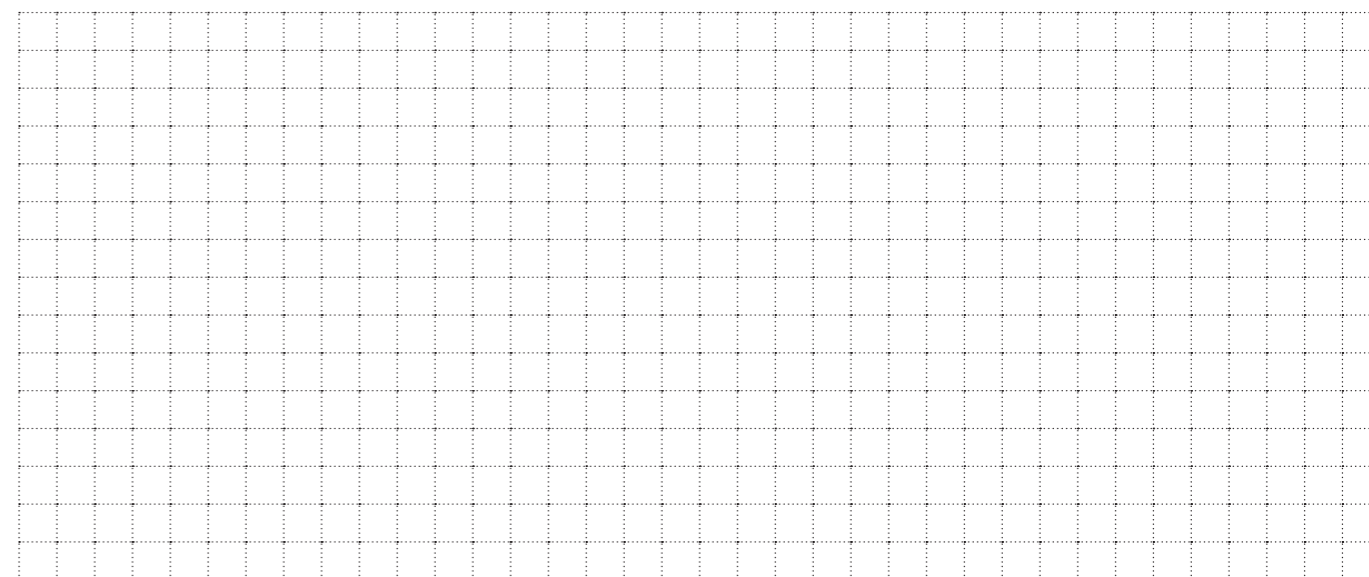
**Vastuseid:** 2)  $b = 12,1$ ;  $\alpha = 16,1^\circ$ ;  $\beta = 73,9^\circ$ ;  $S = 21,2$  4)  $\alpha = 28^\circ$ ;  $a = 3,0$ ;  $c = 6,4$ ;  $S = 8,4$   
6) sellist kolmnurka pole olemas 8)  $\beta = 45^\circ$ ;  $a = b = 11,0$ ;  $c = 15,6$ .



3. Täisnurkse kolmnurga kujulise maatüki pindala on  $240 \text{ m}^2$ . Üks kaatet on 30 m. Leia selle maatüki puuduvad küljed ja nurgad.

4. Alevi keskväljakul on mälestussammas, mis on 8,4 m kõrge ja mille varju pikkus on 20,6 m. Kui suure nurga moodustavad päikesekiired horisondiga? **Vastus:**  $22^\circ$ .

5. Inimese varju pikkus on ligikaudu 1,6 m ning Päikese kõrgus horisondist on  $56^\circ$ . Leia inimese ligikaudne pikkus.



6. Redel, mille pikkus on 4,6 m, pannakse vastu maja seina nii, et nurk redeli ja seina vahel on  $30^\circ$ . Kui kaugel on redeli alumine ots maja seinast? Kui kõrgel maapinnast puudutab redel maja seina? Tee selgitav joonis. **Vastus:** 2,3 m; 4 m.
7. Munaküla kohalik geenius Jaan Tatikas kaotas oma korteri võtmed ja pidi koju pääsemiseks ronima läbi avatud akna. Akna alumine serv paikneb maapinnast 2,2 m kõrgusel ja redel, mille Jaan naabritelt laenas, on 5,8 m pikk. Kui suure nurga moodustab selle redeli alumine ots maapinnaga, kui ülemine ots toetada aknalauale? Tee selgitav joonis. Kas niiviisi paigutatud redelit mööda on mugav ronida? Kuidas paigutaksid redeli Sina? Tee joonis.
8. Kokkupandav kaldtee on mõeldud ratastoolidele ja selle pikkus on 285 cm. Kui suure nurga moodustab kaldtee sõiduteega, kui kaldtee üks ots paikneb sõiduteel ja teine kõnnitee serval, mis on sõiduteest 10 cm võrra kõrgemal. Tee selgitav joonis. **Vastus:**  $\approx 2^\circ$ .
9. Trepi kaldenurk horisontaalpinna suhtes sõltub trepiastme laiuusest  $b$  ja kõrgusest  $h$ . Seost  $2h + b = 63$  nimetatakse „trepi valemiks”. Kui kõrge peab olema selle valemi järgi trepiaste, kui selle laius on 31 cm? Missuguse nurga moodustab see trepp horisontaalpinna? Paneelmajades sageli kasutatavate treppide astmete laius on 31 cm ja kõrgus 12 cm. Kui suure nurga moodustab selline trepp horisontaalpinna?
10. Munaküla suur luuletaja Salomon Wesipruul ehitab maja ning tal on vaja teha sirge trepp. Ruumi laius on 4,5 m ning trepi alumine ots peab jääma seinast 0,7–1,0 m kaugusele ja ülemine ots on põrandast 2,8 m kõrgusel. Salomon tahab teha trepi, millel on 16–17 astet. Kui suur on sel juhul trepiastme laius ja kõrgus?



Lahenda siin:

