Allar Veelmaa

VALMISTU MATEMAATIKA RIIGIEKSAMIKS 2021

Abimaterjal abituriendile

ÕPPEMATERJALIDE KIRJASTUS

2020

Väljaandja kinnitab tööraamatu vastavust kehtivale gümnaasiumi riiklikule õppekavale ning haridus- ja teadusministri poolt õppekirjandusele kehtestatud nõuetele.

Allar Veelmaa

Valmistu matemaatika riigieksamiks 2021
Abimaterjal abituriendile

Retsenseerinud Sirje Sild

Autor tänab retsensenti, toimetuse töötajaid ning Tallinna 32. keskkooli õpetajat Anne Almetit kasulike märkuste ja huvitavate ideede eest. Kõikidest leitud ebatäpsustest ja vigadest palun teatada e-kirjaga allarveelmaa8@hotmail.com.

Toimetaja Regina Reinup
Keeletoimetaja Piret Põldver
Tehniline teostus Heisi Väljak
Joonised Allar Veelmaa ja SA Innove

ISBN 978-9949-641-73-4

Tartu mnt 74, 10144 Tallinn, telefon 5919 6117
www.kirjastusmaurus.ee
tellimine@kirjastusmaurus.ee

SISUKORD

TÖÖRAAMATU KASUTAJALE

Selles tööraamatus on näpunäiteid, soovitusi ja harjutusülesandeid matemaatika riigieksamiks valmistumisel. Ülesanded on rühmitatud teemade järgi, kuid on ka ülesandeid, mille lahendamiseks on vaja teadmisi ja oskusi enam kui ühe kitsa teema ulatuses.

Tööraamat sobib nii kitsa matemaatika kui ka laia matemaatika kursuse järgi õppijatele. Kui ülesande number on **musta värvi**, siis sobib see lahendamiseks kõigile. **Punase numbriga** ülesanded on mõeldud eelkõige laia kursuse järgi õppijatele, kuid see ei tähenda, et kitsa kursuse järgi õppinud õpilane neid lahendada ei tohiks.

Enamiku ülesannete juurde on toodud vastused või näpunäited. Kui mõni ülesanne osutub raskeks ja seda ei õnnestu kohe lahendada, siis proovige järgmist ja mõne aja pärast pöörduge keeruliseks osutunud ülesande juurde tagasi. Loomulikult võib abi küsida ka matemaatikaõpetajalt või klassikaaslastelt.

Kui ülesande juures on märge „kontrollige vastust arvuti abil“, siis kasutage neid IT-vahendeid, mida olete varemgi kasutanud (nt GeoGebra, Photomath, Math Solver, Wolframalpha, Symbolab vms).

Kõik ülesannete lahendamiseks vajalikud valemid on tööraamatu kaante sisekülgedel. Neid valemeid pole mõtet mehaaniliselt pähe õppida, vaid meelde tuleb jätta seosed.

Lisaks tööraamatu ülesannetele võib lahendada ka veebiaadressil http://www.allarveelmaa.ee olevaid teste.

See tööraamat on mõeldud individuaalseks kasutamiseks ja siia võite teha märkmeid ning olemasolevat vaba ruumi kasutada mõne ülesande lahendamiseks.

Edu soovides
Allar Veelmaa,
Loo keskkooli matemaatikaõpetaja

Mida tasub teada matemaatika riigieksami kohta?
Nõuded lahenduste vormistamisele

1. Tasub teada

Täpsed juhised selle kohta, mida eksami ajal võib teha ja mida mitte, leiate SA Innove veebilehelt.

1. Eksami esimene osa kestab 120 minutit ja teine osa 150 minutit. Kahe osa vahel on paus 45 minutit.

2. Eksamitöö kirjutamisel võib kasutada ainult musta või sinist tindi- või pastapliiatsit. Kustutatava tindipliiatsi kasutamine on keelatud. Hariliku pliiatsiga kirjutatud lahendusi ei hinnata (välja arvatud joonised).

3. Ülesande lahendus tuleb kirjutada eksamivihikus selleks ette nähtud kohale. Kui lahendus ei mahu ette nähtud kohale, siis tuleb seda jätkata eksamivihiku lõpus oleval lisalehel. Pooleli jäänud lahenduse lõppu tuleb kirjutada „Lahendus jätkub lisalehel“ vms. Kui eksamivihikus olevale lisalehele lahendused ei mahu, siis tuleb eksamikomisjonilt küsida lisapaber.

4. Arvutuste tegemisel võib kasutada kalkulaatorit. Mobiiltelefoni ja teiste tehniliste seadmete kasutamine ei ole lubatud.

5. Eksamitöö vormistamisel ei tohi kasutada mis tahes kujul esinevaid korrektoreid (vedelik, lint vms).

6. Eksami ajal ei ole lubatud töövahendeid (kalkulaator, joonlaud, mall jms) üksteisele laenata.

7. Käekirja tõttu ebaselged kohad loetakse veaks. Vale arv, sõna, sümbol vms tuleb ühe joonega läbi kriipsutada. Paranduste tegemine eksamitöös ei alanda ülesande lahenduse eest saadavate punktide arvu.

8. Mustandileht on ülesande lahenduse plaani kavandamiseks, jooniste visandamiseks jms. Mustandilehele ei ole mõtet kirjutada ülesande üksikasjalikku lahendust, sest eksamitöö hindamisel mustandit ei vaadata (mustandid jäävad kooli).

9. Mis tahes viisil kõrvalise abi kasutamise korral kõrvaldatakse õpilane eksamilt ja töö hinnatakse 0 punktiga.

10. Eksami ajal ei ole üldjuhul lubatud eksamiruumist lahkuda.

Kui tekkis küsimusi, millest eespool toodud alapunktides juttu ei olnud, siis esitage need oma matemaatikaõpetajale.

2. Kuidas vormistada ülesande lahendust?

Ilmselt on sellele küsimusele juba varem koolitundides vastatud, kuid tuletan meelde mõned olulised momendid.

1. Ülesande lahenduskäik peab olema selge ja loogiline. Vajaduse korral kirjutatakse selgitusi või kommentaare, kuid need peavad olema asjakohased, mis aitavad eksamitööd kontrollival inimesel paremini mõista lahenduskäiku. Selgitada tuleb, *miks midagi tehakse*, ja tuleb hoiduda märkustest, kus *kirjeldatakse* seda, mida parasjagu tehti.
2. Kui ülesande lahendamiseks on vaja (või peate vajalikuks) teha jooniseid, siis need tehakse joonestamisvahendite abil (välja arvatud skeemid, asjakohased illustratsioonid vms).
3. Mõningate ülesannete korral (planimeetria, stereomeetria, jadad jms) pannakse kõigepealt kirja antud suurused ja lõppu lisatakse, mida on tarvis leida. Andmetesse kirjutatud tähiseid kasutame ka valemites. Kui võtate kasutusele uue tähise, siis selgitage selle tähendust.
4. Ülesande lahendamisel kasutusele võetud tähised peavad ühtima tähistega valemites. Kui täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja h ning hüpotenuus f, siis Pythagorase teoreem esitatakse kujul $a^2 + h^2 = f^2$.
5. Võrrandite (murdvõrrand, eksponent- ja logaritmvõrrand, juurvõrrand, trigonomeetriline võrrand) lahendeid on mõistlik kirjalikult kontrollida. Sellega välistame võõrlahendite kirjutamise vastusesse.
6. Tekstülesannete lahendamisel tuleb teha leitud lahendi(te) sisuline kontroll **ülesande teksti järgi**. Sellega välistame tekstiga mitte kooskõlas olevad võrrandi(te) lahendid või sisuliselt absurdsed tulemused.
7. Geomeetriaülesannete puhul peab joonis olema kooskõlas ülesande tekstiga (rombi asemel ei tohi olla ruut; ülesande tekstis esinev termin „kolmnurk“ ei tähenda seda, et tegemist on täisnurkse või võrdhaarse kolmnurgaga jne). Joonis **peab olema** piisavalt suur, et seda saaks kasutada ülesande lahendamisel.
8. Eksamitöös ülesannete juures olevaid jooniseid võib täiendada, uut joonist ei pea tegema.
9. Võimaluse korral ärge poolitage avaldist (võrrandit). Kui poolitate, siis tehtemärgi või võrdusmärgi kohalt, korrates märki uue rea alguses. Sulgudes olevat avaldist ei poolitata.
10. Iga ülesande lahendamine lõpeb vastuse kirjutamisega. Vastusesse tuleb kirjutada ainult need tulemused, mida ülesande tekstis küsiti.
11. Enne eksamitöö äraandmist vaadake hoolega üle kogu töö, et lahendatud oleksid kõik ülesanded, tehtud vajalikud kontrollid ja kirjutatud ülesannete vastused.

Eksamil lahendage kõigepealt need ülesanded, mida oskate kõige paremini lahendada!

3. Näidislahendused

1. Algebralised avaldised

Lihtsustame avaldise $\dfrac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-4}-\dfrac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}+4}-\dfrac{1}{a-16}$.

Lihtsamate avaldiste puhul ei ole mõtet ülesannet lahendada osade kaupa. Kui ruumi on, tuleb eraldi kirjutada ka vastus. Kui ruumi napib, siis piisab vastuse markeerimisest, st tõmbame vastusele alla näiteks kaks joont.

$$\frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-4}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}+4}-\frac{1}{a-16}=$$

Kui olete harjunud murdude laiendajaid kirjutama, siis tehke seda ka eksamitöös.

$$=\frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-4}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}+4}-\frac{1}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}+4)-(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}-4)-1}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)}=$$

$$=\frac{\cancel{a}+4\sqrt{a}+4\sqrt{a}+\cancel{16}-\cancel{a}+4\sqrt{a}+4\sqrt{a}-\cancel{16}-1}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)}=$$

$$=\frac{16\sqrt{a}-1}{a-16}$$

Vastus. Avaldis lihtsustub kujule $\dfrac{16\sqrt{a}-1}{a-16}$.

Lihtsustame avaldise $\left(\dfrac{16}{x+5}+x-5\right):\dfrac{(x^2-9)(x+5)}{x^2+6x+5}$ **ja arvutame selle väärtuse, kui** $x=\dfrac{1}{2}\cos 60^\circ$.

Pikemate ülesannete puhul on mõistlik ülesanne jagada osadeks. Seda tüüpi ülesannete puhul ei ole vaja lisada selgitusi, kui just ei lahendata ülesannet mõnel mitte-traditsioonilisel viisil.

I $\quad \dfrac{16}{x+5}+x^{\backslash(x+5}-5^{\backslash(x+5}=\dfrac{16+x^2+5x-5x-25}{x+5}=\dfrac{x^2-9}{x+5}$.

II $\quad$ Tegurdan x^2+6x+5.

Lahendan võrrandi $x^2+6x+5=0$,

$x_{1;2}=-3\pm\sqrt{9-5}=-3\pm 2$; $x_1=-5$; $x_2=-1$.

$x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$

III $\quad \dfrac{x^2-9}{x+5}:\dfrac{(x^2-9)(x+5)}{(x+5)(x+1)}=\dfrac{\cancelto{1}{(x^2-9)}\cancelto{1}{(x+5)}(x+1)}{\cancelto{1}{(x+5)}\cancelto{1}{(x^2-9)}(x+5)}=\dfrac{x+1}{x+5}$.

Kui $x=\frac{1}{2}\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0{,}25$, siis

$\dfrac{x+1}{x+5}=\dfrac{0{,}25+1}{0{,}25+5}=\dfrac{1{,}25}{5{,}25}=\dfrac{5}{21}$.

Taandamisel tuleb arv 1 kindlasti kirjutada murru lugejasse ja nimetajasse.

Vastus. 1) $\dfrac{x+1}{x+5}$; 2) $\dfrac{5}{21}$.

Kui avaldis sisaldab astmeid või juuri, siis on mõistlik need viia ühele kujule (kõik astmeteks või juurteks) ja vastavad tehted teha eraldi.

Lihtsustage avaldis $\frac{2^{2x+1}\cdot 4^{x-0,5}}{\sqrt{16^{2x}}\cdot 2^{-3}}$.

$2^{2x+1} = 2^{2x}\cdot 2$, $\quad 4^{x-0,5} = (2^2)^{x-0,5} = 2^{2x-1} = \frac{2^{2x}}{2}$,

$\sqrt{16^{2x}} = (16^{2x})^{\frac{1}{2}} = 16^{x} = 2^{4x}$,

$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Lihtsustan avaldise

$$\frac{2^{2x+1}\cdot 4^{x-0,5}}{\sqrt{16^{2x}}\cdot 2^{-3}} = \frac{2^{2x}\cdot 2\cdot \frac{2^{2x}}{2}}{2^{4x}\cdot \frac{1}{2^3}} = \frac{8\cdot 2^{4x}}{2^{4x}} = 8.$$

Vastus. Antud avaldis on lihtsustatud kujul võrdne arvuga 8.

Saab lihtsamalt: teisendage ühe ja sama arvu astmeteks ja kasutage astmete korrutamise ja jagamise valemeid.

2. Võrrandid, võrratused ja vastavad süsteemid

Lineaar- ja ruutvõrrandil ei pea tegema lahendi kontrolli (kui seda ei nõuta ülesande tekstis). Soovi korral võib teha. Kõikide teiste võrrandiliikide puhul (murdvõrrandid, juurvõrrandid, logaritmvõrrandid ja trigonomeetrilised võrrandid) on saadud lahendikandidaate vaja kontrollida, sest võrrandite lahendamisel ei kasutata ainult samasusteisendusi ja seetõttu võivad tekkida ka võõrlahendid. Neid vastusesse ei kirjutata.

Tekstülesannete puhul tuleb teha teksti järgi sisuline kontroll, et kõrvaldada ülesande sisuga mitte sobivad võrrandi lahendid.

Lahendame võrrandi $\frac{12x+24}{x^2-9}+\frac{7+x}{3-x}=\frac{5x}{x+3}$.

Murdvõrrandi lahendamisel **ei pea** kõiki liikmeid tooma ühele poole võrdusmärki. Kasutades võrrandi omadusi, saab lahendeid leida ka lihtsamalt, kuid sel juhul peab kindlasti fikseerima tundmatu keelatud väärtused (mille korral murru nimetaja muutub nulliks). Kõrvaloleva näite puhul ei ole lahendi kontroll vajalik.

$\frac{12x+24}{x^2-9} + \frac{7+x}{3-x} = \frac{5x}{x+3}$

$\frac{12x+24}{(x-3)(x+3)} - \frac{7+x}{x-3} = \frac{5x}{x+3} \;\Big|\cdot(x+3)(x-3)$, $\quad x \neq -3$, $\quad x \neq 3$

$12x+24-(7+x)(x+3) = 5x(x-3)$

$12x+24-7x-21-x^2-3x = 5x^2-15x$

$-6x^2+17x+3=0 \;|\cdot(-1)$

$6x^2-17x-3=0$

$x_{1;2} = \frac{17\pm\sqrt{289+4\cdot 6\cdot 3}}{12} = \frac{17\pm 19}{12}$,

$x_1 = 3$ (võõrlahend),

$x_2 = -\frac{1}{6}$.

Vastus. $x = -\frac{1}{6}$.

Kui Te varem sellist lahendamise meetodit ei ole kasutanud, siis tasub eksamitöös teha nii, nagu olete koolis õppinud.

1. Eksponentvõrrandi lahendamisel on kerge näha, et arvud 9 ja 27 on arvu 3 astmed. Seetõttu on hea, kui õpilane teab peast mõningaid arvu 2 ja 3 astmeid. Lahendi kontroll ei ole otseselt vajalik, kuid enda rahustuseks võib seda teha.

2. Logaritmvõrrandi puhul on mõistlik leida võrrandi määramispiirkond ja seejärel võib asuda võrrandit lahendama. Tasub meelde jätta, et $\log x^2$ ja $\log^2 x$ pole samaväärsed, küll on seda $(\log x)^2$ ja $\log^2 x$.

Lahendage võrrand:

1. $9^{x+2} - \dfrac{1}{27} = 0.$

2. $\log x^2 = \log 2 + \log (x + 4).$

1. $9^{x+2} - \frac{1}{27} = 0,$

$(3^2)^{x+2} = \frac{1}{27},$

$3^{2x+4} = 3^{-3}$

$2x + 4 = -3$

$2x = -7$

$\underline{x = -3{,}5}$

Kontroll:

Kui $x = -3{,}5$, siis

$vp = 9^{-3,5+2} - \frac{1}{27} =$

$= 9^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{27} =$

$= \frac{1}{(\sqrt{9})^3} - \frac{1}{27} = 0,$

$pp = 0$ ja $vp = pp.$

2. $\log x^2 = \log 2 + \log (x+4)$

Kuna $\log a + \log b = \log (ab)$, siis

$\log x^2 = \log [2(x+4)]$, millest

$x^2 = 2x + 8,$

$x^2 - 2x - 8 = 0,$

$x_{1;2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3,$

$x_1 = -2;\ x_2 = 4.$

Kontroll:

1) Kui $x = -2$, siis $vp = \log (-2)^2 = \log 4,$

$pp = \log 2 + \log(-2+4) = \log 2 + \log 2 =$

$= 2\log 2 = \log 2^2 = \log 4. \quad vp = pp.$

2) Kui $x = 4$, siis $vp = \log 4^2 = \log 16$, $pp = \log 2 + \log 8 = \log 16.$

$vp = pp$

Vastus. 1. $x = -3{,}5$ 2. $x_1 = -2;\ x_2 = 4.$

Lahendame võrrandi $\sqrt{x-2} + \sqrt{11-x} = 3$.

Juurvõrrandi lahendamisel teeme lahendi kirjaliku kontrolli.

$\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{11-x} \quad |\,()^2$

$x - 2 = 9 - 6\sqrt{11-x} + 11 - x,$

$2x - 22 = -6\sqrt{11-x} \quad |:(-2)$

$11 - x = 3\sqrt{11-x} \quad |\,()^2$

$121 - 22x + x^2 = 9(11-x),$

$x^2 - 13x + 22 = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 11.$

Kontroll: 1) kui $x = 2$, $vp = 0 + \sqrt{9} = 3 = pp,$

2) kui $x = 11$, $vp = \sqrt{9} + 0 = 3 = pp.$

Vastus. $x_1 = 2;\ x_2 = 11.$

Võrratuste ja võrratusesüsteemide lahendamisel on oluline, et õpilane oskab esitada lahendihulka graafiliselt ja jooniselt nõutud piirkonnad õigesti välja lugeda.

Teksti tuleb tähelepanelikult lugeda, et mitte kirjutada vastuseks võrratusesüsteemi lahendihulk, vaid üksnes täisarvulised lahendid.

Lahendage võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 5-2x < x-|2-5| \\ \dfrac{3x-3}{6} \le 4-\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$$

ja leidke selle võrratusesüsteemi kõik täisarvulised lahendid.

Lahendan mõlemad süsteemis olevad võrratused, leian lahendihulgad L_1 ja L_2 ning võrratusesüsteemi lahendiks on $L = L_1 \cap L_2$.

1) $5-2x < x-|2-5|$,

$5-2x < x-3$;

$-2x-x < -3-5$,

$-3x < -8 \quad | : (-3)$

$x > \frac{8}{3}$

2) $\frac{3x-3}{6} \le 4 - \frac{x+1}{2} \quad | \cdot 6$

$3x-3 \le 24-3(x+1)$

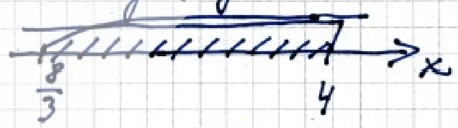
$3x-3 \le 24-3x-3$

$3x+3x \le 24-3+3$

$6x \le 24 \quad | : 6$

$x \le 4$

Märgin lahendihulgad joonisele



$L = \left(\frac{8}{3}; 4\right]$, selles poollõigus on täisarvud 3 ja 4.

Vastus. Täisarvulised lahendid on 3 ja 4.

Kõrvaloleva logaritmvõrrandi lahendamisel **ei ole** leitud võrrandi määramispiirkond, seega võrrandi lahendit **peab kontrollima**.

Kuna lahenduse alguses on ära toodud kasutatavad valemid, siis ei ole vaja lisada sõnalisi selgitusi. Lisaks lahenduse alguses toodud kahele valemile tuleb kirja panna ka logaritmi definitsioon, seda ei ole tehtud.

Lahendage võrrand $\log(36-x^3)-\log 6=2+\log\frac{1}{6}$.

Teame, et $\log a - \log b = \log\frac{a}{b}$ ja
$\log a + \log b = \log(a\cdot b)$.

$\log(36-x^3)-\log 6 = 2+\log 1-\log 6$,
$\log(36-x^3) = 2 \Rightarrow$
$36-x^3 = 10^2 \Rightarrow -x^3 = 64 \Rightarrow x=-4$

Kontroll: Kui $x=-4$, siis
$vp = \log[36-(-4)^3]-\log 6 = \log 100 - \log 6 = 2-\log 6$;
$pp = 2+\log\frac{1}{6} = 2+\log 1-\log 6 = 2-\log 6$.
Seega $vp = pp$.
Vastus. $x=-4$.

Tekstülesande puhul võib teha selgitava joonise, skeemi vms. Liikumisülesannete puhul on üks levinud võimalus märkida andmed tabelisse. Sellisel juhul on võrrandi koostamine suhteliselt lihtne.

Ei tohi unustada, et lahendit peab kontrollima teksti järgi. Soovitan eksamitöösse kirjutada „teen sisulise kontrolli“, selle all tuleb ära näidata tekstipõhised tehted, mis annavad kinnitust sellele, et leitud lahend tõepoolest sobib. Heaks tavaks on see, et andmete märkimisel tabelisse tähistatakse tähega **otsitav** suurus, näidislahenduses on valitud teine tee. Lahendage sama ülesanne ise, tähistades kiiruse *x*-iga.

Tallinnast Narva on mööda maanteed 210 km. Peetril kulus sõiduks Tallinnast Narva ja tagasi kokku 5 tundi, kusjuures tagasiteel oli tema auto keskmine kiirus 20% võrra suurem. Leidke Peetri auto keskmine kiirus Tallinnast Narva sõites.

Märgin andmed tabelisse.

Suund	Tee (km)	Aeg (h)	Kiirus ($\frac{km}{h}$)
Tallinn – Narva	210	x	$\frac{210}{x}$
Narva – Tallinn	210	$5-x$	$\frac{210}{5-x}$

Kasutan seost $s=v\cdot t$.

Tagasiteel oli kiirus 20% esialgsest kiirusest suurem, seega
$\frac{210}{5-x} = 1{,}2\cdot\frac{210}{x} \Rightarrow \frac{210}{5-x} = \frac{252}{x} \Rightarrow 210x = 1260-252x$,
$462x = 1260$,
$x = 2\frac{8}{11}$.

Lahendus jätkub lisalehel.

Otstarbekam on tähistada tähega *x* kiirus, sest seda otsitakse.

LISALEHT

Ülesande nr X lahenduse jätk.

Kui $x = 2\frac{8}{11}$, siis auto keskmine kiirus Tallinnast Narva sõites oli $v=\frac{s}{t}=\frac{210}{2\frac{8}{11}}=77\left(\frac{km}{h}\right)$

Teen sisulise kontrolli teksti järgi.

Kui Peeter sõitis Narva kiirusega 77 $\frac{km}{h}$, siis aega kulus $210:77=2\frac{8}{11}$ tundi. Tagasiteel oli kiirus $77\cdot 1{,}2 = 92{,}4\left(\frac{km}{h}\right)$ ja aega kulus $210:92{,}4 = 2\frac{3}{11}$ tundi. Seega aeg kokku kulus edasi-tagasi sõiduks tõesti 5 tundi.

Vastus. Peetri auto keskmine kiirus teel Tallinnast Narva sõites on 77 $\frac{km}{h}$.

3. Protsendid

Protsentülesannete puhul võib ülesande lahendamisel kasutada skeeme, jooniseid jms. Eriti hoolikas tuleb olla protsendimärgi kasutamisel. Kui tehtes (vastuses) on protsendimärk jäetud kirjutamata, siis on kirja pandud vastus 100 korda tegelikust suurem.

Kui ülesanne on lahendatud, siis tuleb vaadata, kas vastus on realistlik (hind ei lange üle 100%, segu kontsentratsioon ei ole 120% jms). Kuna selles ülesandes on kaks nummerdatud alaülesannet, siis vastuse anname kummalegi alaülesandele eraldi.

1. Kui suure rasvasisaldusega koor saadi, kui segati 300 ml 10% rasvasisaldusega koort ja 200 ml 35% rasvasisaldusega koort?
2. Kui palju tuleb võtta 10% rasvasisaldusega koort ja kui palju 35% rasvasisaldusega koort, et nende segamisel saada 800 ml 25% rasvasisaldusega koort?

1. Teen abistava joonise

$\boxed{\begin{matrix}300\,ml\\10\%\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}200\,ml\\35\%\end{matrix}}$

Kokku on koort 500 ml ja piimarasva on kokku $300\cdot 0,1+200\cdot 0,35=100\,(ml)$.
Seega saame segamisel $\frac{100}{500}\cdot 100\%=20\%$ koore.

2. Teen selgitava joonise.

$\boxed{\begin{matrix}x\,ml\\10\%\end{matrix}}+\boxed{\begin{matrix}800-x\\ml\\35\%\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}800\,ml\\segu\end{matrix}}$

800 ml 25% rasvasisaldusega koores on piimarasva $800\cdot 0,25=200\,(ml)$.

Seega $0,1x+0,35(800-x)=200,$

$0,1x+280-0,35x=200,$

$-0,25x=-80,$

$\underline{x=320}$

Järelikult võtame 320 ml 10% koort ja 480 ml 35% koort.

Vastused. 1) Segamisel saadi 20% koor.
2) Tuleb võtta 320 ml 10% koort ja 480 ml 35% koort.

4. Vektorid. Joone võrrand

Pakutud lahenduse puhul võib küsida, miks pole joonist. Kuna ülesande tekst seda ei nõua ja ülesanne on joonise abita lahendatav, siis on joonise tegemine ilma ilmse vajaduseta nii ajakulu kui ka ruumikulu, sest niigi pika lahenduskäigu vormistamine ühele leheküljele (koos vajalike selgitustega) nõuab osavust.

Õpilane on punktis 3 kahes kohas arvu üle kirjutanud. Kuigi on selgelt näha, et tegemist on numbriga 2, siis selliseid üle kirjutamisi ei soovita teha. Parem on vigane rida läbi kriipsutada ja uuesti kirjutada.

On antud punktid $A(-2; 3)$ ja $B(5; -4)$. Sirge BC on risti sirgega AB ja punkt C asub y-teljel.

1. Arvutage nurk BAC.
2. Koostage kolmnurga ABC tippe läbiva parabooli võrrand.

1. Koostan sirge AB võrrandi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{-7} \Rightarrow$$

$$7(y-3) = -7(x+2) \Rightarrow y-3 = -x-2 \Rightarrow$$

$$\underline{y = -x+1}$$

Sirge BC tõus $k_2 = 1$, sest ristuvate sirgete tõusude korrutis on (-1).

2. Leian sirge BC võrrandi $y - y_1 = k(x - x_1)$.

$$y+4 = x-5 \Rightarrow$$

$$y = x-9,$$

seega $C(0; -9)$.

Nurk BAC on nurk vektorite $\vec{AC}$ ja $\vec{AB}$ vahel. $\vec{AC}\cdot\vec{AB} = |\vec{AC}|\cdot|\vec{AB}|\cdot\cos\angle BAC$,

$\vec{AC} = (2; -12)$ ja $\vec{AB} = (7; -7)$,

$$\cos\angle BAC = \frac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AC}|\cdot|\vec{AB}|} = \frac{14+84}{\sqrt{4+144}\cdot\sqrt{49+49}} \approx 0{,}8137;$$

$$\underline{\angle BAC = \arccos 0{,}8137 \approx 35{,}5^\circ.}$$

3. Punkte $A(-2; 3)$; $B(5; -4)$ ja $C(0; -9)$ läbiva parabooli võrrand on $y = ax^2 + bx - 9$.

Leian arvud a ja b

$$\begin{cases} 3 = a\cdot 4 - b\cdot 2 - 9 \\ -4 = a\cdot 25 + b\cdot 5 - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 12 \\ 25a + 5b = 5, \end{cases}$$

siit

$$\begin{cases} 10a - 5b = 30 \\ 25a + 5b = 5 \end{cases} +$$

$$35a = 35 \Rightarrow a = 1.$$

Leian b: $4\cdot 1 - 2\cdot b = 12 \Rightarrow b = -4$.

Parabooli võrrand on $\underline{y = x^2 - 4x - 9.}$

5. Funktsioonid

On antud funktsioon $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3$.

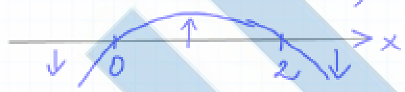
1. Arvutage selle funktsiooni ekstreemumkohad ja leidke kahanemisvahemikud.
2. Punkt A, mille abtsiss on $x_0=3$, asub funktsiooni $f(x)$ graafikul. Läbi punkti A on tõmmatud funktsiooni $f(x)$ graafikule puutuja, mis lõikab funktsiooni $f(x)$ graafikut punktis B. Koostage selle puutuja võrrand ja arvutage punkti B koordinaadid.

1. Ekstreemumkohtade leidmiseks lahendan võrrandi $f'(x)=0$.

$f'(x)=2\cdot\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\cdot 3x^2$, $3x-1,5x^2=0 \Rightarrow$
$1,5x(2-x)=0 \Rightarrow$
$x_1=0;\ x_2=2.$

Ekstreemumkohtade liigi ja kahanemisvahemike leidmiseks teen abijoonise, kus on tuletise graafik. Funktsioon kahaneb vahemikes, kus $f'(x)<0$.

Abijoonis



$X_1^{\downarrow}=(-\infty;0)$
$X_2^{\downarrow}=(2;\infty)$

$x_{min}=0$ (kuna $\downarrow$ läheb üle $\uparrow$),
$x_{max}=2$ (kuna $\uparrow$ läheb üle $\downarrow$).

2. Joone puutuja võrrand on $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Kui $x_0=3$, siis $y_0=f(3)=\frac{3}{2}\cdot 9-\frac{1}{2}\cdot 27=0$.

$f'(x)=3x-1,5x^2 \Rightarrow f'(3)=9-1,5\cdot 9=-4,5$.

Koostan puutuja võrrandi: $y-0=-4,5(x-3)$,
$\underline{y=-4,5x+13,5}$.

Leian punkti B koordinaadid:

$\begin{cases} y=-4,5x+13,5 \\ y=1,5x^2-0,5x^3 \end{cases} \Rightarrow 1,5x^2-0,5x^3=-4,5x+13,5\ |\cdot 2$
$3x^2-x^3=-9x+27,$
$-x^3+3x^2+9x-27=0,$
$-x^2(x-3)+9(x-3)=0$
$(x-3)(9-x^2)=0,$

$x_1=3;\ x_2=3;\ x_3=-3.$

Kui $x=-3$, siis $y=1,5\cdot(-3)^2-0,5\cdot(-3)^3=27$, seega $B(-3;27)$.

Vastus. Puutuja on $y=-4,5x+13,5$. Otsitav punkt on $B(-3;27)$.

Selles ülesandes on kõik vajalikud selgitused ja rohkem pole vaja midagi lisada. Ekstreemumkoha liigi võib määrata ka teise tuletise abil.

Pikkade lahenduskäikude puhul võib kujuneda probleemiks lahenduse paigutamine ühele leheküljele. Kui see ei õnnestu, siis tuleb pooleli jäänud lahenduse lõppu kirjutada „lahendus jätkub lisalehel“ ja seal saab lahendust jätkata.

Esitatud lahenduse puhul torkab silma, et lahendus on püütud ära mahutada ühele leheküljele ja seetõttu on tekst lehe alumises osas liiga tihe.

Soovitan eksamiks valmistumisel kasutada varasemate eksamiülesannete väljatrükke ja püüda oma lahendus ette antud pinnale ära mahutada.

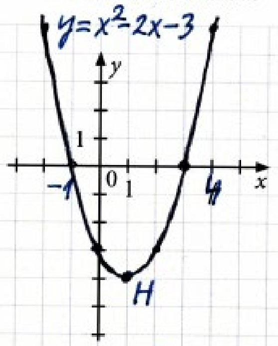
Parabooli joonestamiseks on tehtud tabel ja muutuja x väärtused on võetud tabelisse –3 kuni 5, sest x-teljele saab need arvud märkida. Arvutamisel ilmneb, et $f(-3) = f(5) = 12$ ja neid punkte ei saa teljestikku märkida. Sellest ei maksa välja teha ning märgime need punktid, mille puhul see on võimalik.

Joonise tegemisel pöörake tähelepanu sellele, et parabool oleks haripunkti ümbruses kumer, st ei tohi tekkida punkti H juurde teravikku.

Punktis 2 on antud funktsioon $g(x)$ ja lahendusest on näha, et õpilane oli viga tegemas: tahtis kirjutada ekstreemumkoha tingimuseks $f'(x) = 0$, kuid märkas õigel ajal eksimust ja parandas selle. Kuna tekstist on selgelt näha, et kirjas on $g'(x) = 0$, siis vormistamise koha pealt pole mõtet norida.

Ülesande lahendus lõpeb vastuse korrektse esitamisega.

1. Arvutage funktsiooni $f(x) = x^2 - 2x - 3$ nullkohad ja graafiku haripunkti koordinaadid ning konstrueerige funktsiooni graafik.
2. On antud funktsioon $g(x) = 1{,}5x^2 - 0{,}5x^3$. Arvutage selle funktsiooni ekstreemumkohad ja leidke kasvamisvahemik.



1\. Nullkohtade leidmiseks lahendan võrrandi $f(x) = 0$.

$x^2 - 2x - 3 = 0$,

$x_{1;2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$.

Nullkohad on $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Haripunkti $x_h = -\frac{b}{2a}$,

$x_h = -\frac{-2}{2} = 1$, $y_h = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

Graafiku haripunkt on $H(1; -4)$.

Graafiku joonestamiseks koostan tabeli

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

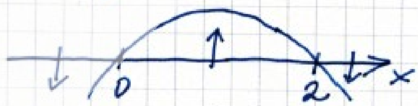
2\. $g(x) = 1{,}5x^2 - 0{,}5x^3$.

Ekstreemumkohtade tingimus: $g'(x) = 0$.

$g'(x) = 3x - 1{,}5x^2$. $1{,}5x(2 - x) = 0$,

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Ekstreemumkoha liigi määramiseks teen abijoonise



$x_{min} = 0$ (kahanemine läheb üle kasvamiseks);

$x_{max} = 2$ (kasvamine läheb üle kahanemiseks).

Vastused 1. $X^0 = \{-1; 4\}$; $H(1; -4)$

2\. $x_{min} = 0$; $x_{max} = 2$;

$X^{\uparrow} = (0; 2)$.

Ülesande lahendaja ei ole kirjutanud midagi üleliigset, samas on kõik vajalik üheselt arusaadavalt kirja pandud.

Jagatise tuletise leidmisel ei ole vaja kirja panna jagatise tuletise arvutamise reeglit, lahenduskäigust ilmneb, et õpilane teab seda ja oskab kasutada.

Ülesande lahendamine lõpeb vastuse korrektse esitamisega.

1. Leidke funktsiooni $f(x) = 2x^2 \cdot (x-1)$ miinimumpunkti koordinaadid.
2. Leidke funktsiooni $g(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ tuletis ja lahendage võrratus $g'(x) > 0$.

1. Leian $f(x)$ miinimumkoha:

$f(x) = 2x^3 - 2x^2$,

$f'(x) = 6x^2 - 4x$.

Miinimumkohas $f'(x) = 0$,

$6x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 1{,}5x^2 - x = 0$,

$x(1{,}5x - 1) = 0$,

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

Ekstreemumkoha liigi määran abijooniselt.

$x_{min} = \frac{2}{3}$ (kahanemine läheb üle kasvamiseks)

$y_{min} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{8}{27}$.

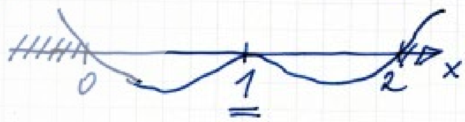
$P_{min}\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{27}\right)$.

2. $g'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} =$

$= \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Võrratuse lahendan intervallmeetodiga

$\frac{2x(x-2)}{(x-1)^2} > 0$



Võrratuse lahendihulk on

$L = (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$.

Vastus. 1. $P_{min}\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{27}\right)$

2. $g'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$; $L = (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$.

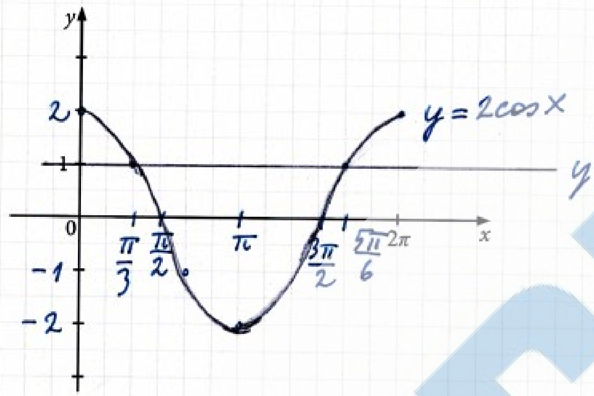
Trigonomeetriliste funktsioonide graafikute joonestamisel aitab see, kui eelnevalt teate peast, kuidas paikneb koordinaatteljestikus $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ graafik.

Joonestatud teljestikus on x-teljel vahemaa 0 kuni 2π jagatud 12 võrdseks osaks ja see lihtsustab graafiku joonestamist. Arvutusi võib teha nii kraadi- kui ka radiaanmõõdus.

Trigonomeetriliste võrrandite lahendivalemeid on vaja teada, sest üldlahendist on erilahendite eraldamine lihtsam kui nende graafiku abil „väljavõlumine“.

Ülesanne 6. (10 punkti)

1. Lihtsustage avaldis $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2\frac{2\pi}{3}-\cos(\pi+x)+\sin^2\frac{2\pi}{3}$.
2. Lahendage võrrand $2\cos x = 1$ ja joonise abil võrratus $2\cos x < 1$, kui $x \in [0;\ 2\pi]$.



1.1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2\frac{2\pi}{3}+\sin^2\frac{2\pi}{3}-\cos(\pi+x) =$

$= \cos x + 1 + \cos x = 1 + 2\cos x.$

1.2. $2\cos x = 1,$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2n\pi,\ n\in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n\in Z.$

Lõiku $[0; 2\pi]$ kuuluvad $x_1 = \frac{\pi}{3};\ x_2 = \frac{5\pi}{3}$.

2. $2\cos x < 1$

$x\in\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$, vaata jooniselt.

6. Pindala arvutamine

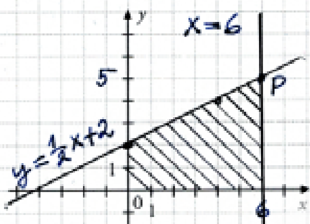
Pindala arvutamise ülesannete puhul ei ole vaja tingimata kasutada määratud integraali. Kui ülesanne lahendub lihtsamalt, siis soovitan selliseid võimalusi ka kasutada.

Ülesande lahenduse korrektsuse huvides on vaja välja arvutada sirgete $y = 0,5x + 2$ ja $x = 0$ ning $x = 6$ lõikepunktide koordinaadid. Kui ülesanne tuleb lahendada kitsa matemaatika eksamitöös, siis võib lõikepunktid leida ka joonisel.

Pindala leitakse pindalaühikutes (pü) ja kirjutis 21 cm² vms on siin ekslik, sest ühiku pikkus ei ole 1 cm.

Joonestage koordinaatteljestikku sirged $y = \frac{1}{2}x + 2$ ja $x = 6$.

1. Viirutage kujund, mis on piiratud antud sirgete ja mõlema koordinaatteljega.
2. Arvutage viirutatud kujundi pindala.



1) Leian sirgel $y=\frac{1}{2}x+2$ kaks punkti:

x	0	4
y	2	4

2) Tegemist on täisnurkse trapetsiga: alused on 2ü ja 5ü ja kõrgus 6ü.

Trapetsi pindala $S = \frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{2+5}{2}\cdot 6 =$

$= 21$ pindalaühikut.

Vastus. Viirutatud kujundi pindala on 21 pü

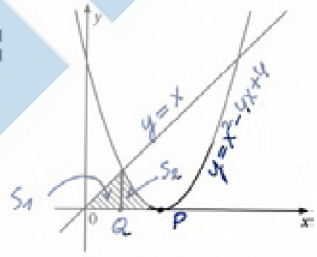
Keerukamate pindala arvutamise ülesannete puhul tuleb sageli pinnatükk jagada osadeks. Antud juhul arvutame sirge ja parabooli lõikepunktid ning paneme tähele, et x-telg on parabooli $y = x^2 - 4x + 4$ puutujaks kohal $x = 2$. Termini „abstsiss“ asemel võib öelda ka „x-koordinaat“.

Leiame mõlema pinnatüki pindala ja liidame need.

Pindala arvutamisel tulemusi ei ümardata.

Ülesanne 10. (10 punkti)

Joonisel on sirge $y = x$ ja parabool $y = x^2 - 4x + 4$. Arvutage joonisel viirutatud kujundi pindala.



Jaotan viirutatud pinnatüki kaheks osaks ja arvutan integreerimise rajad.

1) $y=x$ ja $y=x^2-4x+4$ lõikuvad, st

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2-4x+4 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+4 = x,$$

$x^2-5x+4=0,$

$x_1 = 1;\ x_2 = 4$ (ei sobi).

Kuna $x^2-4x+4=(x-2)^2$, siis punkti P abstsiss on 2.

2) Leian S_1: $S_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ (pü).

3) Leian S_2: $S_2 = \int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx =$

$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - 8 + 8 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right) =$

$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}$ (pü).

Pindala $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ (pü).

Vastus. Viirutatud pinnatüki pindala on $\frac{5}{6}$ pindalaühikut.

8. Tõenäosus

Tõenäosusteooria ülesannete puhul on vaja lisada selgitused. Eraldi tuleb välja tuua klassikalise tõenäosuse arvutamise valem ning kui kombinatsioonide arvutamisel kasutatakse kalkulaatorit, siis kombinatsioonide arvutamise valem tuleb kirja panna.

Näidisülesande lõpus ei ole eraldi vastus välja toodud, kuigi võiks. Samas ei saa seda lugeda oluliseks puuduseks, sest alaülesannete vastused on markeeritud.

Karbis on rohelised ja punased pliiatsid, kokku 27 pliiatsit. Valides juhuslikult ühe pliiatsi, on punase pliiatsi saamise tõenäosus $\frac{4}{9}$.

1. Mitu punast ja mitu rohelist pliiatsit on karbis?
2. Arvutage järgmiste sündmuste tõenäosus:
   1) üks juhuslikult võetud pliiats on roheline;
   2) kaks juhuslikult võetud pliiatsit on mõlemad punased.

1. Punase pliiatsi võtmise tõenäosus $p = \frac{4}{9}$, seega punaseid pliiatseid on $n = 27 \cdot \frac{4}{9} = \underline{\underline{12}}$ ja rohelisi pliiatseid on $27 - 12 = \underline{\underline{15}}$.

2. $P = \frac{m}{n}$ (või $p = \frac{m}{n}$), m – soodsad võimalused, n – kõik võimalused

1) $p = \frac{15}{27} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$.

2) $p = \frac{C_{12}^2}{C_{27}^2} = \frac{66}{351} = \underline{\underline{\frac{22}{117}}}$, $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Ülesande lahendust võib illustreerida – lisada skeeme, jooniseid vms.

Siin pole eraldi kirja pandud kombinatsioonide arvutamise valemit, kuid lahenduskäigust on näha, kuidas on arvutatud.

Suveniiripoes müüakse ühesugustesse karpidesse pakitud siniseid ja punaseid kruuse. Igas karbis on üks kruus. Riiulil oli 10 sinise kruusiga karpi ja 14 punase kruusiga karpi. Kui suur on tõenäosus sellelt riiulilt nelja juhusliku karbi võtmisel saada

1) üks sinine ja kolm punast kruusi?

2) vähemalt kolm punast kruusi?

$\underbrace{\text{10 sinist} \quad \text{14 punast}}_{\text{Kokku 24 kruusi}}$

Võtame juhuslikult 4 kruusi, võimalusi on

$n = C_{24}^4 = \frac{24!}{4!(24-4)!} = 10626$.

1) 1 sinine, 3 punast $\quad P = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{14}^3}{C_{24}^4} = \frac{10 \cdot 364}{10626} = \underline{\underline{\frac{260}{759}}}$.

2) Võetakse 3 punast ja 1 sinine või 4 punast:

$P = \frac{C_{14}^3 \cdot C_{10}^1 + C_{14}^4}{C_{24}^4} = \underline{\underline{\frac{221}{506}}}$.

Ülesande lahendus on korrektne, kuid puudusena võib märkida seda, et punktis 2 oleks vaja olnud kirja panna klassikalise tõenäosuse arvutamise valem. Kombinatsioonide arvutamise valemit ei ole eraldi välja toodud, sest punktis 1 on näha, kuidas kombinatsioone arvutatakse.

Ülesanne 11. (10 punkti)

Kirjastuses töötab 8 toimetajat: 2 meest ja 6 naist. Nende hulgast valiti juhuslikult 2 käsikirja toimetajat.

1. Mitu erinevat võimalust oli 2 toimetaja valimiseks?
2. Kui suur oli tõenäosus, et mõlemad juhuslikult valitud toimetajad olid mehed?
3. Üks toimetaja märkas viga tõenäosusega 0,95 ja teine tõenäosusega 0,80. Kui suur on tõenäosus, et
   1) mõlemad toimetajad märkasid viga?
   2) vähemalt üks toimetaja märkas viga?

$$\underbrace{2 \text{ meest} \qquad 6 \text{ naist}}_{\text{Kokku 8 inimest}}$$

1. $n = C_8^2 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$.

2. $p = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}$.

3. 1) $p = 0,95 \cdot 0,80 = 0,76$.

2) Leian tõenäosuse, et kumbki ei märganud ja lahutan selle tõenäosuse 1-st,

$p = 1 - 0,05 \cdot 0,2 = 0,99$

Parem on öelda, et leidsin vastandsündmuse tõenäosuse ja lahutan selle kindla sündmuse tõenäosusest ehk arvust 1.

Vastus.
1. $n = 28$
2. $p = \frac{1}{28}$
3. 1) $0,76 = p$
   2) $p = 0,99$