

Allar Veelmaa

**Valmistu
põhikooli matemaatika
lõpueksamiks 2021**

2021

 **maurus**

Kirjastus Maurus kinnitab: tööraamat vastab põhikooli riiklikule õppekavale ning haridus- ja teadusministri poolt õppekirjandusele kehtestatud nõuetele.

Allar Veelmaa Valmistu põhikooli matemaatika lõpueksamiks 2021

Retsenseerinud Anne Küüsmäa ja Sirje Sild.

Autor tänab retsensente ja Loo Keskkooli õpilasi kasulike märkuste ja huvitavate ideede eest.

Keeletoimetaja Piret Pöldver
Joonised Allar Veelmaa
Tehniline teostus Tuuli Järmut ja Heisi Väljak
Toimetajad Tarvo Siilaberg ja Regina Reinup

Fotod ja illustratsioonid:

Baumax Eesti (82; 106 all); Neeme Habakuk (111);

Shutterstock.com: Ramona Heim (15); Alexander Raths (33); Madeleine Openshaw (69 vasakul); photosync (69 paremal); vovan (91); movit (102); NickolayV (105 ülal); jnumber9 (105 all); Segen (106 ülal); urbanbuzz (109); shippee (133).

Aluskaardi andmed AS Regio (<http://pood.regio.ee/kategooriad/kaardiandmed>) KL-14-021 (98)

Allikad: Statistikaamet 2018, Wikipedia

ISBN 978-9949-641-76-5

Autoriõigus Allar Veelmaa ja kirjastus Maurus OÜ
Põhikooli lõpueksamite ülesannete autoriõigus: SA Innove/Haridus- ja Noorteamet
Originaal: Matemaatika tööraamat põhikooli lõpetajale, 2014
Seitsmes, parandatud ja täiendatud trükk 2021

Kirjastus Maurus
Tartu mnt 74, 10144 Tallinn, tel 5919 6117
www.kirjastusmaurus.ee
tellimine@kirjastusmaurus.ee

Kõik õigused käesolevale väljaandele on seadusega kaitstud. Ilma autoriõiguse omaniku eelneva kirjaliku loata pole lubatud ühtki selle tööraamatu osa paljundada ei elektrooniliselt, mehaaniliselt ega muul viisil.

Tööraamatu kasutajale

Käesolev tööraamat on mõeldud Sulle, põhikooli lõpetaja. Siit leiad vajalikke valemeid, ülesannete näidislahendusi ning ülesandeid iseseisvaks lahendamiseks järgmistel teemadel:

- 1) arvutamine;
- 2) protsendid;
- 3) korrutamise abivalemite kasutamine;
- 4) lineaar- ja ruutvõrrandid;
- 5) tekstülesannete lahendamine lineaarvõrrandi abil;
- 6) lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine;
- 7) tekstülesannete lahendamine ruutvõrrandi abil;
- 8) tekstülesannete lahendamine lineaarvõrrandisüsteemi abil;
- 9) tehted algebraliste murdudega;
- 10) ratsionaalavaldisel lihtsustamine;
- 11) tehted astmete ja juurtega;
- 12) funktsioonid ja nende graafikud;
- 13) täisnurkse kolmnurga lahendamine;
- 14) tasandilised kujundid;
- 15) ruumikujundid;
- 16) tõenäosusteooria ja statistika elemendid.

Tööraamatus on kõigepealt valemid, nendele järgnevad näiteülesanded, seejärel ülesanded iseseisvaks lahendamiseks. Arvutamiseks on jäetud tühjad ruudustikud ülesannete alla.

Tööraamatu ülesannete lahendamisel võib Sulle abiks olla ka videotundide kogumik, mille leiad internetist aadressil <http://www.allarveelmaa.ee> ja kus on materjalid kõikide põhikoolis õpitud teemade kohta. Lisaks on seal ka testid, mille lahendamisel saad oma teadmisi kontrollida.

Paljud ülesanded on vastustega. Kui vastust pole antud, siis mõningate ülesannete puhul saad kasutada arvutiprogramme **WolframAlpha** (<http://m.wolframalpha.com/>) ja **Calcme** (<https://calcme.com/a>).

Edu soovides
Allar Veelmaa

1. Arvutamine ratsionaalarvudega

Kui teeme tehteid harilike murdudega, siis kasutame järgmisi arvutamiseeskirju:

Murdude liitmine: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

Murdude lahutamine: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$

Murdude korrutamine: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Murdude jagamine: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$$\frac{2^{(7)}}{3} + \frac{5^{(3)}}{7} = \frac{14+15}{21} = \frac{29}{21} = 1\frac{8}{21}$$

$$\frac{2^{(4)}}{3} - \frac{3^{(3)}}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{8-9}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{8} : \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4}{8 \cdot 3} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

1. Tee tehted ja võimaluse korral kontrolli tulemust taskuarvuti abil (kui arvutil on klahv $\boxed{a \frac{b}{c}}$).

a) $2\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6} =$

b) $2\frac{1}{5} + 1\frac{5}{6} =$

c) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{6} =$

d) $2\frac{1}{3} : 1\frac{5}{6} =$

Kui ülesandes on enam kui üks tehe, siis määrame tehete järjekorra ja teeme tehted eraldi.

Leiame avaldise $\left(5 - 2\frac{1}{3}\right) : \left(4\frac{1}{3} + 2\frac{3}{5}\right)$ väärtuse.

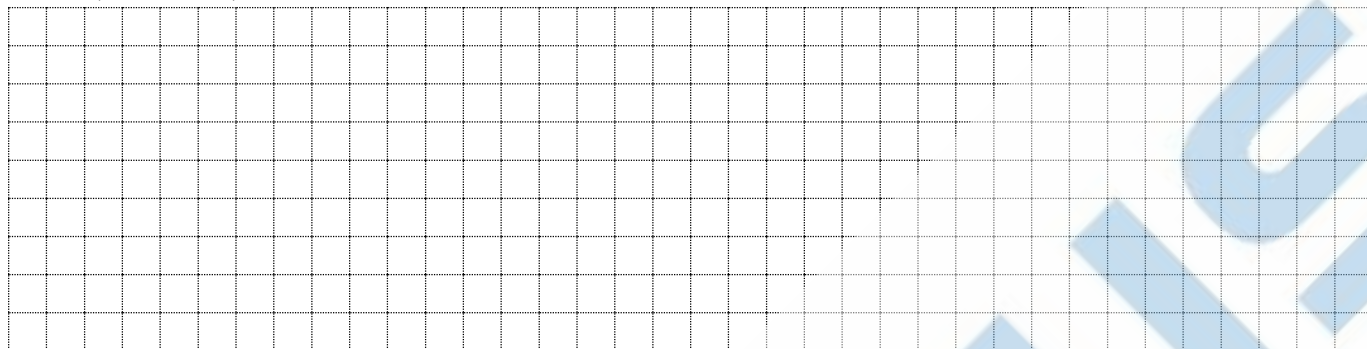
Leiame kõigepealt vahe $5 - 2\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$, seejärel summa $4\frac{1}{3} + 2\frac{3}{5} = 6\frac{5+9}{15} = 6\frac{14}{15}$, nüüd jagame esimesena leitud vahe murdude summaga:

$$2\frac{2}{3} : 6\frac{14}{15} = \frac{8}{3} : \frac{104}{15} = \frac{8 \cdot 15}{3 \cdot 104} = \frac{5}{13}$$

Vastus: avaldise väärtus on $\frac{5}{13}$.

2. Leia avaldise täpne väärtus.

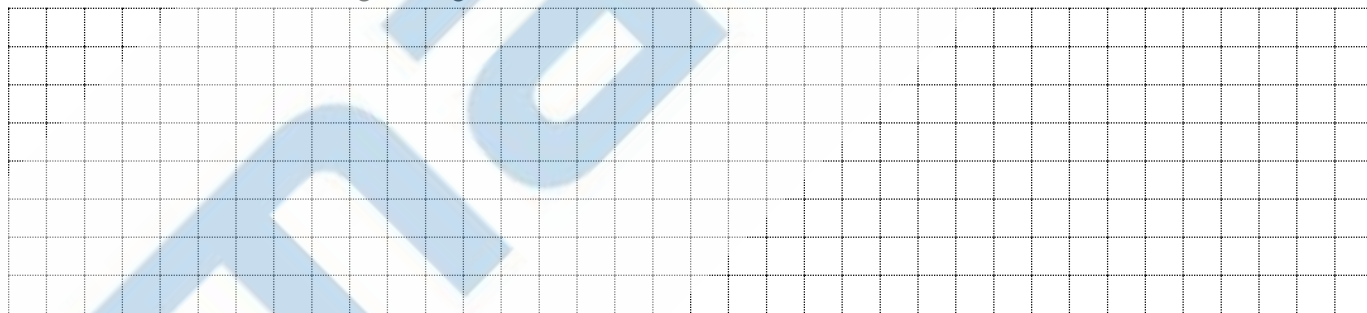
a) $\left(2\frac{1}{3} - 1,75\right) : 2,25 =$



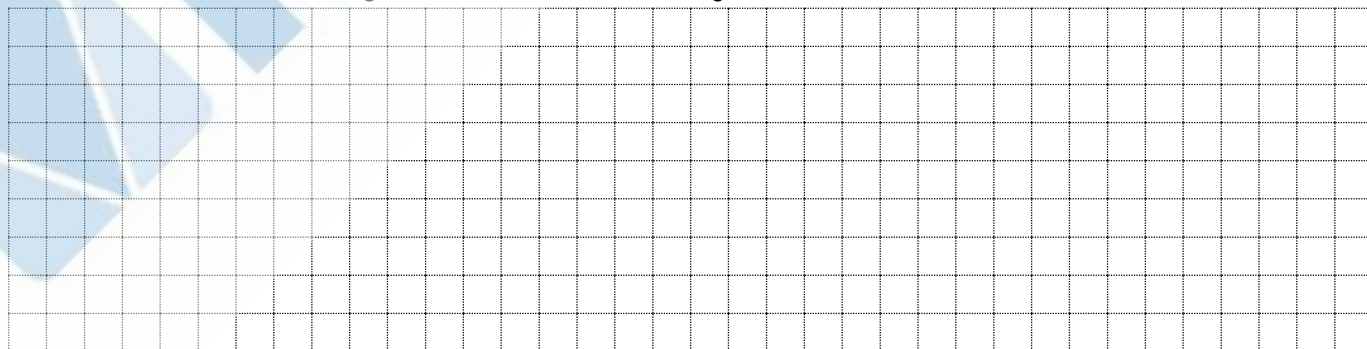
b) $\left(13 - 1,6 - \frac{2}{3}\right) : \left(1,6 + \frac{1}{3}\right) =$



c) Leia 80% arvude $2\frac{1}{8}$ ja $3\frac{1}{3}$ poolsummast.



d) Jaga arvude 4,5 ja $\frac{1}{6}$ summa arvude 4,5 ja $\frac{1}{6}$ vahega.



3. Kontrolli kirjalikult arvutades kas vastus on õige. Leia üks viga.

a) $-3,6 - 2\frac{1}{3} \cdot 3 = -10,6$	b) $\frac{5}{7} - 2,8 : 0,25 = -10\frac{17}{35}$
c) $-2^2 - 3^3 - 2 \cdot (-5)^1 = -21$	d) $-3 \cdot (-4) - 5 \cdot 3\frac{1}{5} - 6^0 = -5$
e) $1,01 - 1,1 \cdot \frac{1}{10} = 0,9$	f) $\frac{2,3 - 2\frac{1}{3}}{2,3 + 2\frac{1}{3}} = 0$

4. Arvuta kalkulaatori abil avaldise väärtus sajandiku täpsusega.

a) $12,78 \cdot 7,98 + 12,08 \cdot 8,56 \approx$

b) $3,298 : 0,19 - 12,876 \cdot 12,009 \approx$

c) $\frac{3,3 \cdot 4\frac{1}{3}}{3,3 + 4\frac{1}{3}} \approx$

d) $\sqrt{\frac{2}{3}} - \sin 16^\circ \approx$

5. Arvuta (kalkulaatori abil) avaldise täpne väärtus.

a) $3,5 \cdot 10^4 \cdot 4,25 \cdot 10^{12} =$

b) $5,6 \cdot 10^6 : (8 \cdot 10^{13}) =$

c) $3,5 \cdot 10^4 : 5,6 \cdot 10^{12} =$

d) $123 \cdot 10^{-6} \cdot 0,001 \cdot 10^{11} =$

2. Prosentarvutus

Prosentarvutuse põhiülesanneteks on:

- osa leidmine tervest;
- terve leidmine osa järgi;
- osamäär leidmine ehk osa ja terve suhte väljendamine protsentides;
- suuruse kasvamine ja kahanemine protsentides;
- protsendipunkti leidmine.

Teame, et $1\% = \frac{1}{100}$ osa tervest ja üks promill ehk $1\text{‰} = \frac{1}{1000}$ osa tervest.

Jätame meelde seose, mille abil saab paljusid protsentülesandeid lahendada:

$$\text{osa} = \text{terve} \cdot \text{osamäär}.$$

Suuruse kasvamist (kahanemist) protsentides leiame valemiga

$$\text{muutus (\%)} = \frac{|\text{lõppväärtus} - \text{algväärtus}|}{\text{algväärtus}} \cdot 100\%.$$

- Jüri netopalk on 668 €, millest tal tuleb maksta 200 € suurune korteriüür. Mitu protsenti Jüri palgast kulub üüri maksmiseks?

Kasutame seost $\text{osa} = \text{terve} \cdot \text{osamäär}$.

Meie ülesandes on terve 668 ja osa 200, osamäär leidmiseks jagame osa tervega, st

$$\frac{200}{668} \approx 0,299 \text{ ehk } 29,9\%.$$

Vastus: üüri maksmiseks kulub ligikaudu 29,9% palgast.

- Talumees oli 20. augustiks koristanud rukki 24 hektarilt, mis moodustab kogu külvipinnast 32%. Kui suur on rukki külvipind?

Kasutame seost eelmisest ülesandest. Osa on 24 ja osamäär 32%, seega tuleb leida terve. Selle saame, kui jagame osa osamääraga, st

$$\frac{24}{32\%} = \frac{24}{0,32} = 75.$$

Vastus: rukist on külvatud 75 hektarile.

- Riigikogu esimehe ametipalk oli 2018. a 5356 eurot, riigikogu lihtliige sai sellest 65% ja kooliõpetaja ligikaudu 0,2147 osa. Leia riigikogu lihtliikme ja õpetaja palk.

Riigikogu lihtliikme palk: leiame 65% arvust 5356, saame $0,65 \cdot 5356 = 3481,40$ (EUR).

Õpetaja palk: $0,2147 \cdot 5356 \approx 1150$ (EUR).

Vastus: riigikogu lihtliige teenis ühes kuus 3481,4 eurot ja õpetaja 1150 eurot.

4. Tabelis on Jüri ja Mari kehakaal kevadel ja sügisel.

	Kevadel	Sügisel
Jüri	68 kg	74 kg
Mari	74 kg	68 kg

Leiame, mitme protsendi võrra Jüri kaal suurenes ja Mari kaal vähenes.

$$\text{Jüri: } m = \frac{74 - 68}{68} \cdot 100\% \approx 8,8\% \text{ ja}$$

$$\text{Mari: } m = \frac{|68 - 74|}{74} \cdot 100\% \approx 8,1\%.$$

Vastus: Jüri kaal suurenes 8,8% ja Mari kaal vähenes 8,1%.

5. Sotsiaaldemokraatlikku erakonda toetas 2018. a märtsis 11% küsitletud inimestest ja juunis oli toetusprotsent 14. Keskerakonna puhul olid need arvud 24 ja 23. Kas on õige väita, et SDE toetus tõusis 3% ja KE toetus vähenes 1%? Eitava vastuse korral leia, mitme protsendi võrra mõlema erakonna toetus tegelikult muutus.

Et küsimusele vastata, on lihtsam kasutada teisi arve. Oletame, et jaanuaris on mingi partei toetusprotsent 10 ja veebruaris 0. Siis on ilmselt arusaadav, et toetus pole langenud mitte 10%, vaid 100%. Seega vastus esitatud küsimusele on eitav.

Küll aga on õige öelda, et SDE toetus tõusis kolm **protsendipunkti (pP)** ja KE toetus langes ühe protsendipunkti võrra.

Vastuse teisele küsimusele leiame samal viisil, nagu tegime seda näites 4. Seega SDE toetus tõusis

$$s = \frac{14 - 11}{11} \cdot 100\% \approx 27,3\% \text{ ja}$$

KE toetus langes

$$k = \frac{|23 - 24|}{24} \cdot 100\% \approx 4,2\%.$$

1. Leia

a) 28% arvust 468;

b) 8% 6,5 meetrist;

c) 0,4% 2066 eurost;

d) 125% 40 tonnist;

e) 15,5‰ 60 500 tonnist;

f) 0,4% 0,4 kilomeetrist.

2. On teada, et $\text{osa} = \text{terve} \cdot \text{osamäär}$. Avalda sellest seosest **terve** ja **osamäär**.

3. Korrutamise abivalemite kasutamine

Korrutamise abivalemeid kasutatakse hulkliikmete korrutamise või tegurdamise lihtsustamiseks.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \quad \text{kahe kaksliikme korrutamine}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \text{ruutude vahe valem}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 \quad \text{summa ja vahe ruut}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a \cdot b + b^2) \quad \text{kuupide summa ja vahe}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a \cdot b + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3 \quad \text{summa ja vahe kuup}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 - b^3$$

$$(a - b)^2 = (b - a)^2$$

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

$$(-a - b) \cdot (a - b) = b^2 - a^2$$

1. Leia igale korrutamistehtele sobiv vastus.

a) $(3x + y)(4x - y) =$

O $12x^2 + 7x - 10$

b) $(4x - 1)(1 + 4x) =$

S $9x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

c) $(3 + 5x)(3 + 6x) =$

P $30x^2 + 33x + 9$

d) $(2 + 3x)(2 - 3x^2) =$

O $-9y^2 - 6xy - x^2$

e) $(-3x + 2)(-4x - 5) =$

H $12x^2 + xy - y^2$

f) $(-x - 3)(-5 - 3x) =$

U $1 - 4x^2y^2$

g) $-(x + 3y)(3y + x) =$

P $3x^2 + 14x + 15$

h) $-(x - 3y)(3y + x) =$

T $-x^2 + 9y^2$

i) $-(x - 3y)(3y - x) =$

I $16x^2 - 1$

j) $(-4x + 0,5y)(4y + 0,5x) =$

M $2y^2 - 15,75xy - 2x^2$

k) $(1 - 2xy)(2xy + 1) =$

P $-9x^3 - 6x^2 + 6x + 4$

l) $(2 - 3x)(2 - 3x^2) =$

A $x^2 - 6xy + 9y^2$

Võtmesõna (kirjuta lünka vastuse ees olev suurtäht).

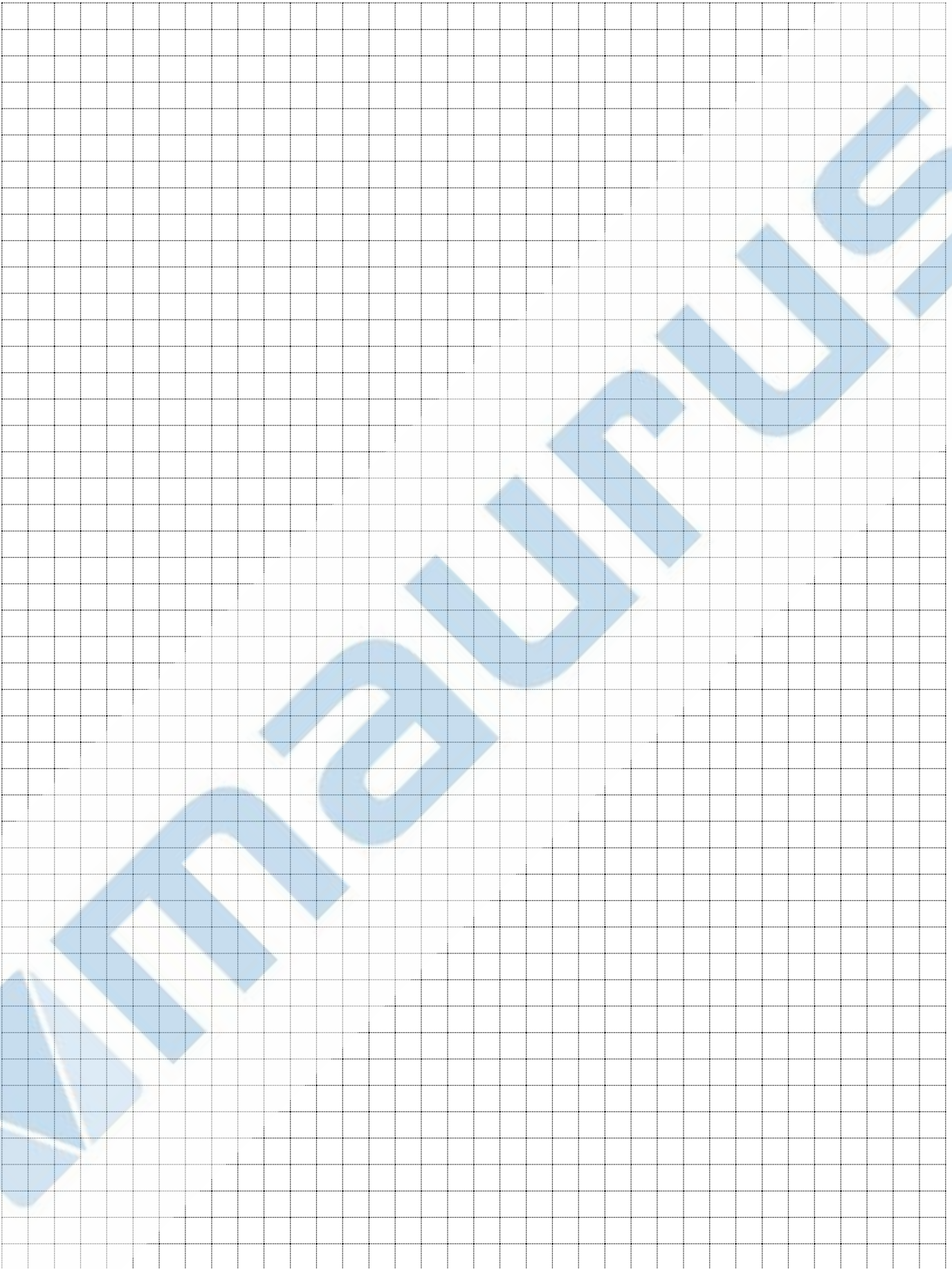
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l

2. Tõesta, et kehtivad võrdused

1) $(a - b)^2 = (b - a)^2;$

2) $(-a - b)^2 = (a + b)^2;$

3) $(-a - b) \cdot (a - b) = b^2 - a^2.$



3. Ava sulud. Kontrolli vastuseid WolframAlpha või Calcme abil.

a) $(2 + 3x)^2 =$	b) $(-3 + 2x)^2 =$
c) $(5x - y)^2 =$	d) $-(3y + x)^2 =$
e) $(3x - 4y)^2 =$	f) $(2x + 1)(1 - 2x) =$
g) $(2x + 5y)^2 =$	h) $(2x + 1)(1 + 2x) =$
i) $(0,1x + 0,3y)^2 =$	j) $(0x + 5y)^2 =$
k) $(-3x - 2y)^2 =$	l) $(3x - 2014x)^2 =$

4. Täida lüngad nii, et võrdus kehtiks (ühel juhul ei ole see võimalik).

- | | |
|---|--|
| a) $(3a + 2)(2 - 3a) = \dots - \dots a^2$ | b) $16m^2 - \dots n^2 = (\dots m + \dots n)(\dots m - \dots n)$ |
| c) $(p + 3b)(p - \dots) = -9b^2 + p^2$ | d) $-25a^2 + 9b^2 = (\dots b + \dots a)(\dots b - \dots a)$ |
| e) $(-4u + 5v)(5v + 4u) = \dots v^2 - \dots u^2$ | f) $0,25k^2 - \dots v^2 = (\dots k + v)(\dots k - v)$ |
| g) $(3ab + 2)(\dots - 3ab) = 4 - \dots$ | h) $12u^2 - \dots u^2 = \dots u^2$ |
| i) $(7u + 5)(5 - \dots u) = -25 + \dots u^2$ | j) $\frac{1}{16}k^2 - \frac{4}{9}v^2 = \left(\frac{1}{4}k + \dots\right)\left(\dots - \frac{2}{3}v\right)$ |
| k) $(a^2b - cd^2)(\dots + \dots) = a^4b^2 - c^2d^4$ | l) $121k^2 - \dots m^2 = (\dots k + 9m)(11k - 9\dots)$ |

5. Täida lüngad nii, et võrdus kehtiks (neljal juhul ei ole see võimalik).

- | | |
|--|--|
| a) $(2x + 1)^2 = \dots x^2 + 2x + \dots$ | b) $(3x - 2y)^2 = \dots x^2 - \dots xy + \dots y^2$ |
| c) $(\dots a + \dots)^2 = 4a^2 + \dots + 9$ | d) $(\dots a + \dots)^2 = 4a^2 + \dots - 9$ |
| e) $(3a - \dots b)^2 = \dots - 30ab + \dots$ | f) $(0,4x + \dots)^2 = \dots + 5x + \dots$ |
| g) $(\dots u + 3v)^2 = 16u^2 + 7u + \dots$ | h) $(\dots u + 3v)^2 = 16u^2 + 24u + \dots$ |
| i) $(0,3a + \dots b)^2 = \dots a^2 + \dots ab + b^2$ | j) $(2a - \dots)^2 = \dots - \dots + 9b^2$ |
| k) $\left(\frac{2}{3}a - \dots b\right)^2 = \dots - \dots + 2,25b^2$ | l) $(\dots a - \dots b)^2 = 0,64a^2 - \dots + 2,25b^2$ |

6. Täida lüngad nii, et võrdus kehtiks.

- | | |
|---|--|
| a) $(-2a - 3b)(2a - \dots b) = \dots b^2 - \dots a^2$ | b) $(-3x - 2y)^2 = \dots x^2 + \dots xy + \dots y^2$ |
| c) $(-3a + \dots b)^2 = 16b^2 - \dots ab + \dots a^2$ | d) $(0,3p^2 + 2n)(\dots p^2 - \dots) = \dots p^4 - 4n^2$ |
| e) $27 - p^3 = (3 \dots p)(\dots + \dots + p^2)$ | f) $0 - p^3 = \dots p^3$ |
| g) $a^3 + \dots = (a \dots 4)(a^2 - 4a + \dots)$ | h) $(5m + 3)(25m^2 - \dots + 9) = \dots m^3 + \dots$ |

- i) $(2k + 1)(4k^2 - \dots + 1) = \dots k^3 + 1$ j) $-(27b^6 - 8a^3) = (2a - 3b^2)(\dots a^2 + \dots)$
 k) $(1 - 2a)(1 + \dots a + \dots a^2) = 1 - \dots a^3$ l) $(0,5x^2 - y^3)(0,25x^4 + \dots + y^6) = \dots x^6 - y^9$

7. Väino lihtsustas avaldised ja Tiiu kontrollis tulemusi. Mitu viga Tiiu leidis?

- a) $(3x - 1)(2x + 5) - (4x + 1)(3 - 2x) = 14x^2 + 3x - 8$
 b) $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2 = 5x^2 - 5y^2$
 c) $(4x + 3y)(3y - 4x) - (3x - 2y)^2 = -25x^2 + 12xy + 5y^2$
 d) $(5x + 3)^2 - (3 - 5x)^2 = 60x$
 e) $(5x + 3)^2 - 2(3 - 5x)^2 = 120x$
 f) $-3(5x + 3)^2 - (3 - 5x)^2 = -100x^2 - 60x - 36$
 g) $(2x - 3y)^2 - (2x - 3y)(3y + 2x) + (2x + 3y)^2 = 4x^2 + 27y^2$
 h) $(2x - 3y)^2 - 3(2x - 3y)(3y + 2x) + (3y - 2x)^2 = -4x^2 - 24xy + 45y^2$
 i) $(-4x - 3y)^2 - (3x + 4y)^2 - (3x + 4y)(4y - 3x) = 16x^2 - 23y^2$
 j) $-(3x + 5y)^2 + 25x^2 + 29xy + (5y - 3x)^2 = 25x^2 + 31xy$

Vastus: Tiiu leidis viga.

8. Lihtsusta avaldis $(3x + 2y)^2 - 5(2x + y)(y - 2x)$ ja arvuta selle väärtus, kui

a) $x = 3; y = 2;$

b) $x = -3; y = 4,5;$

c) $x = \frac{3}{4}; y = -\frac{1}{3}.$

9. Lihtsusta avaldis $(2x - 3y)^2 - 3(2x - 3y)(3x + 2y) - (3y - 2x)^2$ ja arvuta selle väärtus, kui

a) $x = 0; y = 2,5;$

b) $x = 3; y = -4;$

c) $x = -2 : 3; y = \frac{1}{3}.$

10. Lihtsusta avaldis $\left(\frac{2}{3}x - 0,2y\right)^2 - \left(\frac{2}{3}x - 2y\right)(x - 2y).$

11. Tõesta, et avaldise $(3x - 2y)^2 + 5y^2 - (3y - 2x)^2 - 5x^2$ väärtus ei sõltu muutujate x ja y väärtusest.

12. Tõesta, et avaldise $\left[(2x + 3)^2 - (3x - 2)^2 + 5x^2 - 24x\right]^2$ väärtus on muutuja x iga väärtuse korral 25.

